

SISTEMI AUTOMATSKOG UPRAVLJANJA

Žarko Zečević
Elektrotehnički fakultet
Univerzitet Crne Gore

Mapa kursa

Modelovanje

- Klasifikacija sistema
- Diferencijalne jednačine
- Funkcija prenosa
 - Polovi, nule, pojačanje
 - Strukturni blok dijagrami
 - Graf toka signala
- Model u prostoru stanja
 - Kanonične forme
 - Linearizacija
 - Rješavanje jednačina stanja

Analiza

- Kontrolabilnost i opservabilnost
- Stabilnost sistema
 - Raus
 - Nikvist
- Performanse SAU-a
 - Stacionarno stanje
 - Prelazni proces
 - Kompleksni domen
- Frekvencijske karakteristike
 - Bodeovi dijagrami

Dizajn

- Specifikacije sistema
- Kompenzatori
 - Pojačavač
 - Integralni kompenzator
 - Diferencijalni kompenzator
 - Diferencijalno - integralni kompenzator
- PID regulator
- Fizičke realizacije
- Diskretizacija kontinualnih regulatora

Predavanje 6

Nikvistov kriterijum stabilnosti

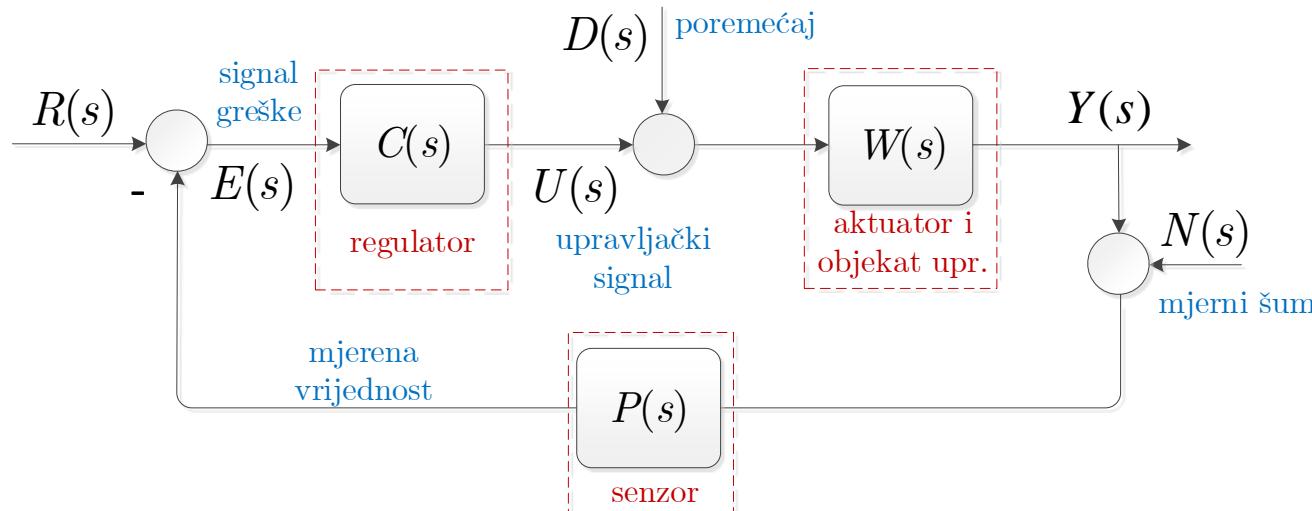
Ishodi učenja:

Nakon savladavanja gradiva sa ovog predavanja studenti će moći da:

- ❖ Razumiju primjenu Košijeve teoreme o priraštaju argumenta za ispitivanje stabilnosti spregnutog sistema
- ❖ Naprave razliku između Rausovog i Nikvistovog kriterijuma stabilnosti
- ❖ Ispitaju stabilnost sistema koristeći Nikvistov kriterijum stabilnosti
- ❖ Razumiju pojmove aposolutne i relativne stabilnosti sistema i definišu margine stabilnosti

Osnovna upravljačka petlja

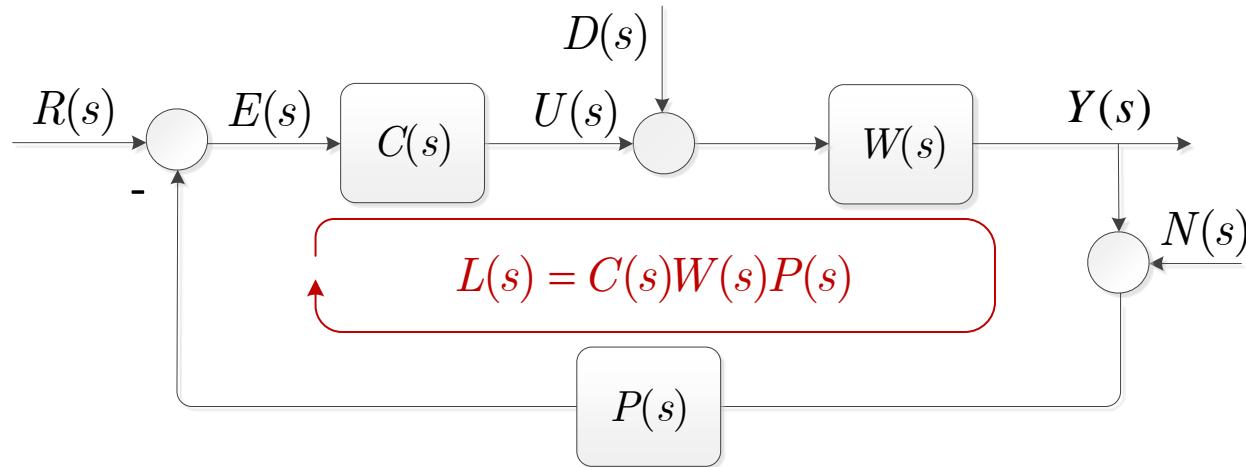
Na slici ispod je prikazana osnovna regulaciona kontura SAU-a.



Podsjetimo se da je cilj SAU-a minimizacija razlike između referentnog signala i mjerene vrijednosti izlaznog signala, odnosno minimizacija signala greške $E(s)$. Radi jednostavnosti, objekat upravljanja i aktuator su predstavljeni jednom funkcijom prenosa $W(s)$. Da bi signal greške konvergirao ka nekoj konačnoj vrijednosti (poželjno je ka nuli), prije svega neophodno je da sistem bude **stabilan**.

Osnovna upravljačka petlja

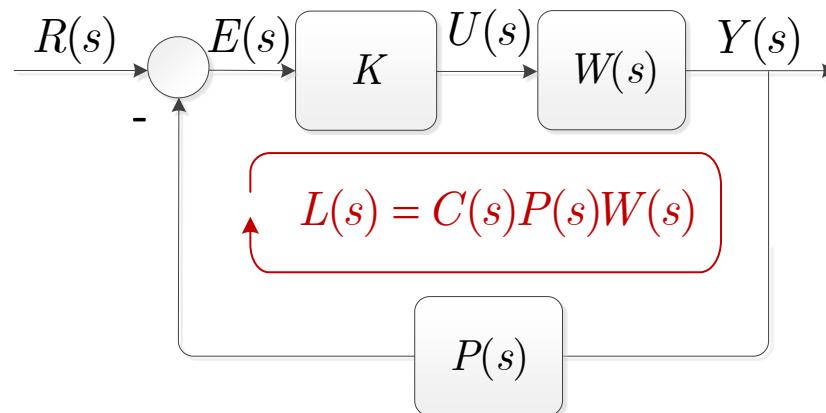
Sada ćemo definisati pojmove koji su bitni za nastavak izlaganja.



- Funkcija povratnog prenosa ili funkcija prenosa u otvorenoj sprezi se zove funkcija prenosa: $L(s)=C(s)W(s)P(s)$.
- Funkcija spregnutog prenosa (ekvivalentna funkcija prenosa) je:
$$G(s) = \frac{C(s)W(s)}{1 + C(s)W(s)P(s)}$$
- Funkciju $F(s)=1+C(s)W(s)P(s)$ ćemo zvati karakteristična funkcija.

Pojednostavljena upravljačka petlja

Za potrebe analize stabilnosti posmatraćemo najprostiji tipa regulatora – pojačavač $C(s)=K$, dok ćemo se nešto složenijim regulatorima baviti kasnije. Takođe, za analizu stabilnosti smetnje i mjerne šumovi nijesu relevantni, te ih možemo zanemariti.



Funkcije spregnutog i povratnog prenosa u ovom slučaju su:

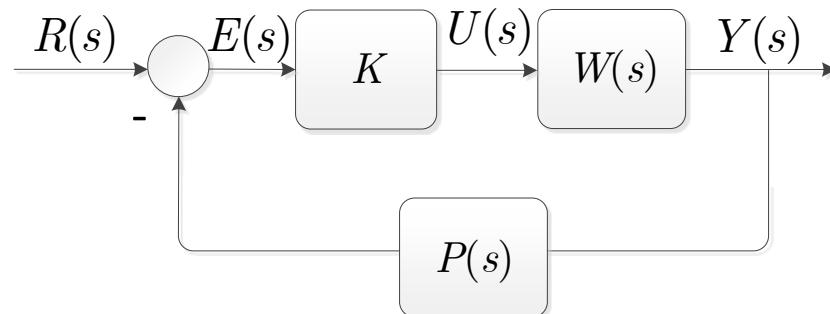
$$G(s) = \frac{KP(s)W(s)}{1 + KP(s)W(s)} \text{ i } L(s) = KP(s)W(s),$$

dok je karakteristična funkcija jednaka:

$$F(s) = 1 + KP(s)W(s).$$

Stabilnost sistema

Linearni vremenski invarijantni sistem je stabilan ukoliko njegov impulsni odziv konvergira ka nuli, odnosno ukoliko svi polovi sistema leže u lijevoj poluravni s -ravni. Da bi ispitali stabilnost spregnutog sistema, potrebno je odrediti karakterističnu jednačinu, odnosno imenilac funkcije spregnutog prenosa, na osnovu koje se dalje određuju polovi i donose zaključci o stabilnosti.

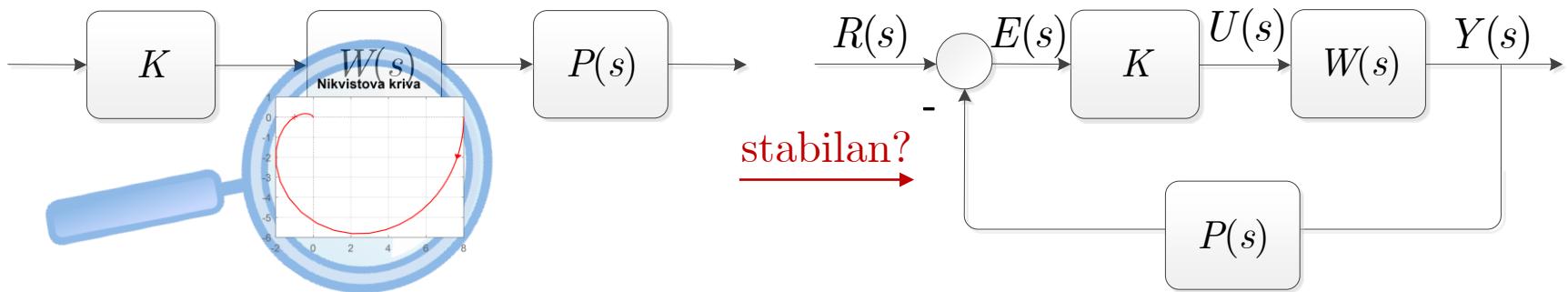


Rausov kriterijum je postupak koji omogućava određivanje broja stabilnih polova, bez rješavanja karakteristične jednačine.

Međutim, iako je Rausov postupak jednostavniji od direktnog pronalaženja polova funkcije prenosa, ispitivanje stabilnosti sistema višeg reda na ovaj način može biti dosta složeno.

Stabilnost sistema

Pored Rausovog kriterijuma postoje i druge metode za utvrđivanje stabilnosti sistema. Jedna od metoda je **Nikvistov kriterijum** koji omogućava ispitivanje stabilnosti linearnih, stacionarnih sistema u zatvorenoj sprezi, posmatranjem funkcije prenosa u otvorenoj sprezi.



Nikvistov kriterijum ima veliki praktični značaj. Prije svega, Nikvistova kriva, na osnovu koje se ispituje stabilnost sistema, se može snimiti eksperimentalnim putem. Pored toga, Nikvistov kriterijum je pogodan za utvrđivanje relativne stabilnosti sistema, kao i za utvrđivanje stabilnosti sistema u kojima se javljaju čista vremenska kašnjenja (iracionalne funkcije prenosa).

Košijev princip o priraštaju argumenta

Za izvođenje Nikvistovog kriterijuma stabilnosti koristi se Košijev princip argumenta, koja je formulisan u nastavku.

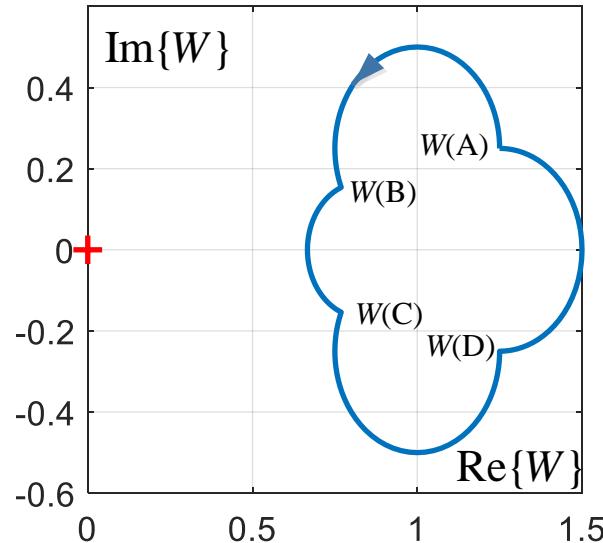
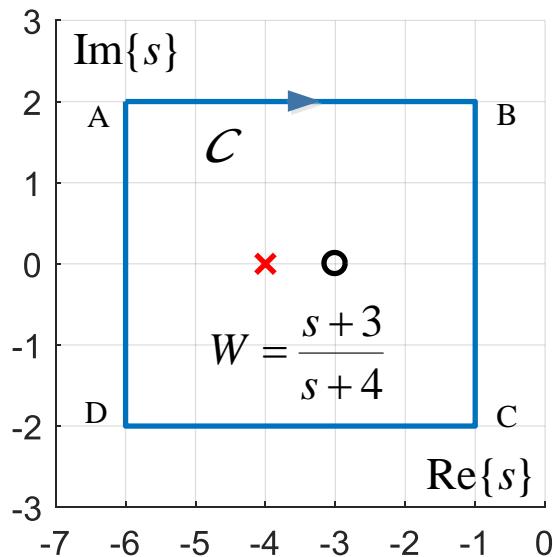
Košijev princip argumenta

Ako neku kompleksnu funkciju $F(s)$ obidemo po *zatvorenoj* kompleksnoj konturi C u proizvoljnom smjeru, pod uslovom da $F(s)$ na toj konturi nema ni polova ni nula, rezultujuća kriva $F(C)$ će *obuhvatiti koordinatni početak za ugao* koji jednak $/(N-P)/2\pi$, gdje je N broj nula, a P broj polova kompleksne funkcije $F(s)$ koji leže *unutar* konture C . Ukoliko je $N-P$ pozitivno, onda se smjer rezultujuće krive poklapa sa smjerom obilaska konture. Odnosno, ukoliko je $N-P$ negativno, onda je smjer rezultujuće krive suprotan smjeru obilaska konture C .

Prije nego što pređemo na izvođenje Nikvistove krive, na par ilustrativnih primjera će biti bliže objašnjeno Košijevo tvrđenje. Više informacija o Košijevom principu argumenta može se pronaći na sljedećem [linku](#).

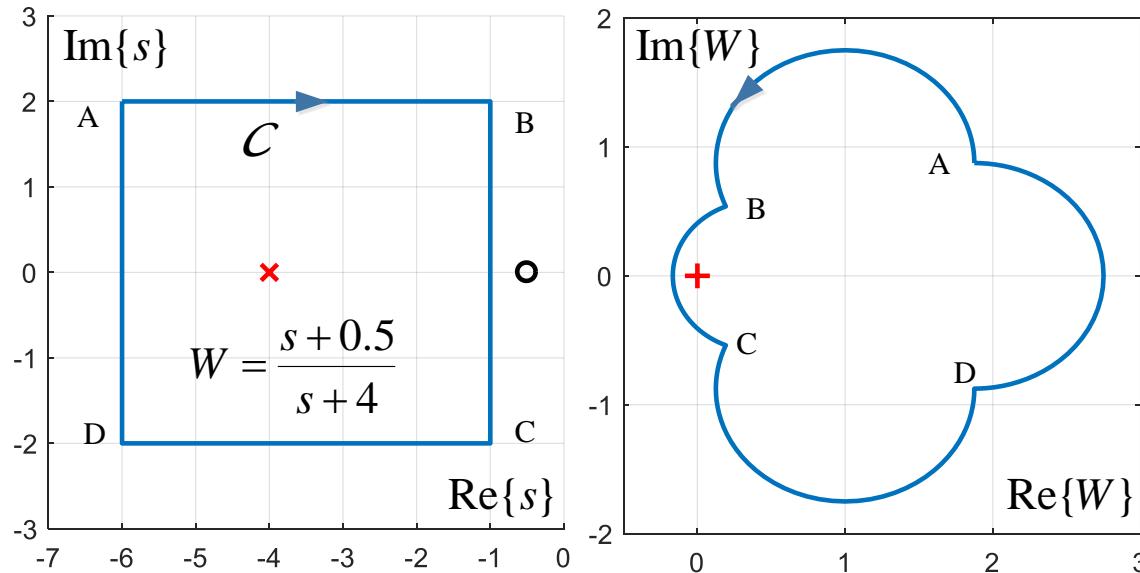
Primjer - Košijeva teorema

Posmatrajmo konturu ABCD u s ravni i funkciju $W(s)$. Ako funkciju $W(s)$ obidiemo po konturi ABCD (izračunamo vrijednost krive $W(s)$ za svaku tačku na konturi), rezultujuća kontura će imati oblik prikazan na slici ispod. S obzirom na to da kontura ABCD obuhvata jedan pol i jednu nulu funkcije $W(s)$, rezultujuća kontura će oko koordinatnog početka napraviti ugao $(1-1)2\pi = 0$ rad. Sa slike desno se može uočiti da rezultujuća kontura $W(ABCD)$ uopšte ne obuhvata koordinatni početak, što je u skladu sa tvrđenjem.



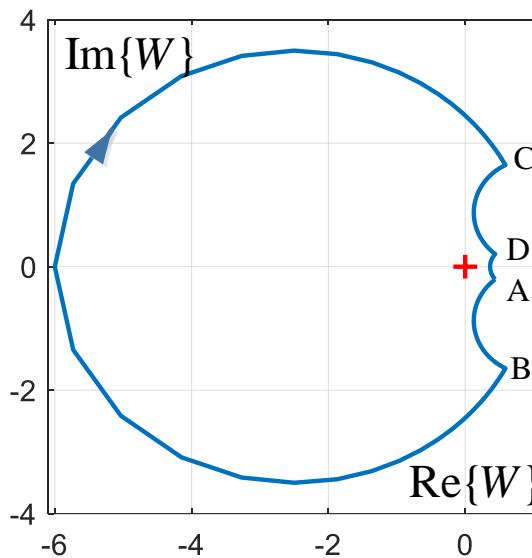
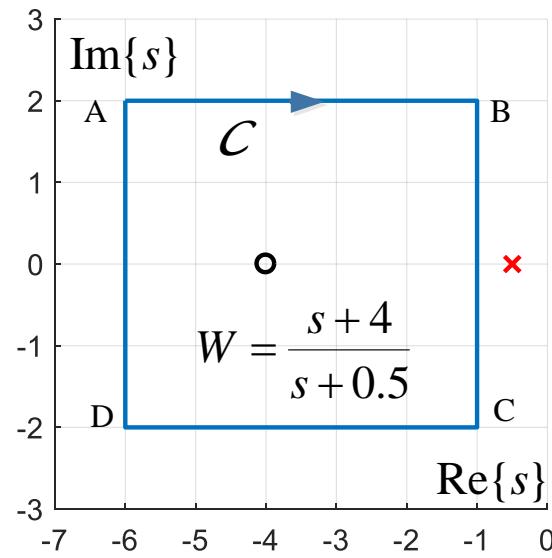
Primjer - Košijeva teorema

Posmatrajmo sada istu konturu ABCD, ali drugu funkciju $W(s)$. Kako sada kontura ABCD obuhvata jedan pol i nijednu nulu funkcije $W(s)$, rezultujuća kontura će u W -ravni oko koordinatnog početka napraviti ugao $(0-1)\pi = -2\pi$ rad. Negativan predznak znači da kontura $W(ABCD)$ obuhvata koordinanti početak u W -ravni u smjeru suprotnom od smjera obilaska konture ABCD. Kako smo konturu ABCD obišli u negativnom smjeru, to znači da će $W(ABCD)$ obuhvati koordinatni početak za ugao 2π u pozitivnom smjeru, što se i vidi sa slike ispod.



Primjer - Košijeva teorema

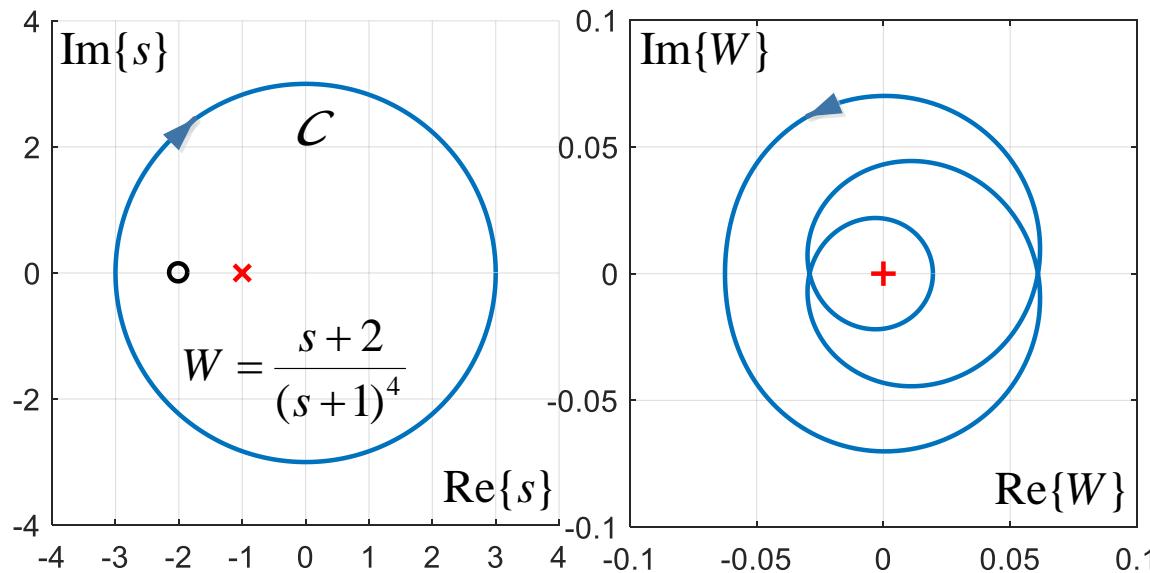
I u ovom primjeru je uzeta ista kontura ABCD. Sada je funkcija $W(s)$ usvojena tako da kontura ABCD obuhvata jednu nulu i nijedan pol. Po Košijevoj teoremi rezultujuća kontura će oko koordinatnog početka napraviti ugao $(1-0)2\pi = 2\pi$ rad. Kako je rezultat pozitivan, to znači da će se rezultujuća kontura obuhvatiti koordinanti početak u smjeru obilaska konture ABCD, odnosno, u ovom primjeru za pun krug u negativnom smjeru, što se i vidi na slike ispod.



Primjer - Košijeva teorema

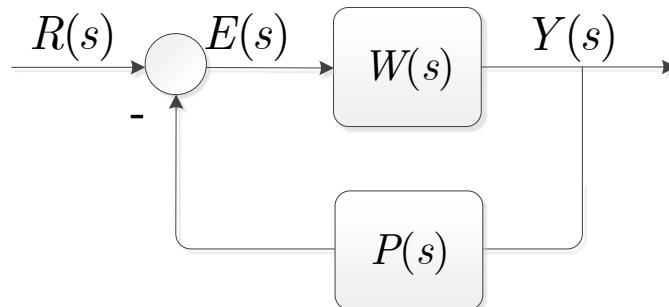
Konačno, u zadnjem primjeru je uzeta kružna kontura C , poluprečnika 2. Funkcija prenosa ima tri pola i jednu nulu koji se nalaze unutar konture C .

Po Košijevoj teoremi argumenata rezultujuća kontura $W(C)$ će obuhvatiti koordinatni početak za ugao $(1-4)2\pi = -3\pi$. Sa slike ispod se vidi da rezultujuća kontura pravi tri kruga oko koordinatnog početka, u pozitivnom smjeru.



Nikvistov kriterijum stabilnosti

Najprije posmatrajamo slučaj kada je $C(s)=K=1$, a kasnije ćemo se vratiti na opštiji slučaj kada u direktnoj granici imamo podesivo pojačanje K .



Nikvistov kriterijum nam omogućava da ispitamo stabilnost spregnutog sistema:

$$G(s) = \frac{W(s)}{1 + P(s)W(s)},$$

posmatrajući funkciju povratnog prenosa, koja je u ovom slučaju jednaka $L(s)=P(s)W(s)$. Drugim riječima, omogućava nam da zaključimo da li će sistem biti stabilan kada se uspostavi povratna spega!

Nikvistov kriterijum se izvodi primjenom Košijeve teoreme argumenata na karakterističnu funkciju $F(s) = 1+P(s)W(s)=1+L(s)$.

Nikvistov kriterijum stabilnosti

Posmatrajamo karakterističnu funkciju $F(s) = 1 + L(s)$ od koje zavisi stabilnost spregnutog sistema. Neka je $L(s)$ racionalna funkcija koja ima N nula i P polova u desnoj poluravni s -ravni.

$$L(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \quad \begin{matrix} \leftarrow N \text{ nula u desnoj poluravni} \\ \leftarrow P \text{ polova u desnoj poluravni} \end{matrix}$$

Funkcije $L(s)$ i $F(s)$ imaju isti imenilac, odnosno polove.

Karakteristična funkcija je jednaka:

$$F(s) = 1 + L(s) = 1 + \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{D(s) + N(s)}{D(s)} \quad \begin{matrix} \leftarrow N_F \text{ nula u desnoj poluravni} \\ \leftarrow P_F = P \text{ polova u desnoj poluravni} \end{matrix}$$

Funkcija spregnutog prenosa sistema je:

$$G(s) = \frac{W(s)}{1 + L(s)} = \frac{\frac{N_w(s)}{D_w(s)}}{\frac{D(s) + N(s)}{D(s)(= D_w(s)D_p(s))}} \quad \begin{matrix} \nearrow \\ \searrow \end{matrix}$$
$$f(s) = D(s) + N(s)$$

Brojilac funkcije $F(s)$ predstavlja karakteristični polinom spregnutog sistema. Da bi spregnuti sistem bio stabilan, $F(s)$ ne smije imati nule u desnoj poluravni, jer su to polovi spregnutog sistema!

Nikvistov kriterijum stabilnosti

Neka se zatvorena kontura C , po kojoj ćemo obići karakterističnu funkciju $F(s)$, sastoji od imaginarne ose $j\omega$ i polukruga beskonačnog poluprečnika, odnosno desne poluravni s -ravni, kao što je prikazano na slici. Kontura C se naziva Nikvistova kontura. Takođe primjetimo da je usvojen negativni smjer obilaska konture.

Konturu C možemo podijeliti na tri segmenta:

- AB – pozitivni dio imaginarne ose:

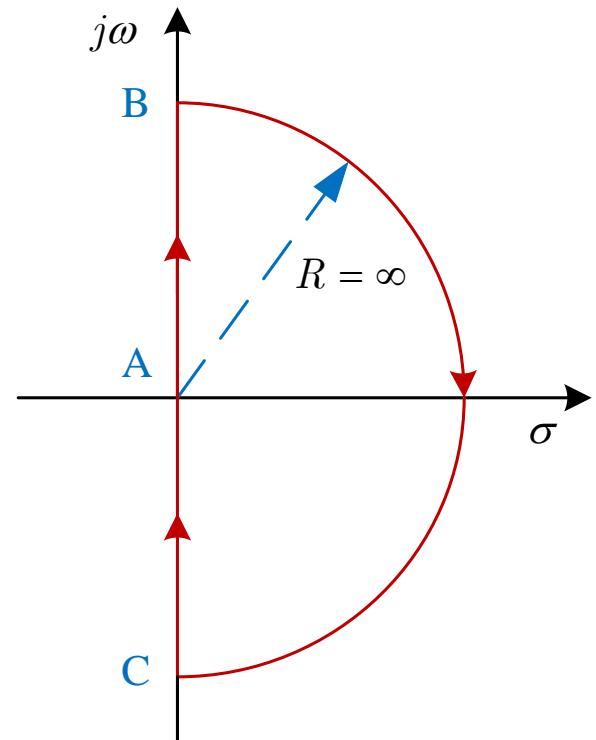
$$j\omega, \omega \in (0, \infty),$$

- BC – polukrug beskonačnog poluprečnika:

$$re^{j\theta}, \theta \in (\pi / 2, -\pi / 2), r \rightarrow \infty,$$

- CA – negativni dio imaginarne ose

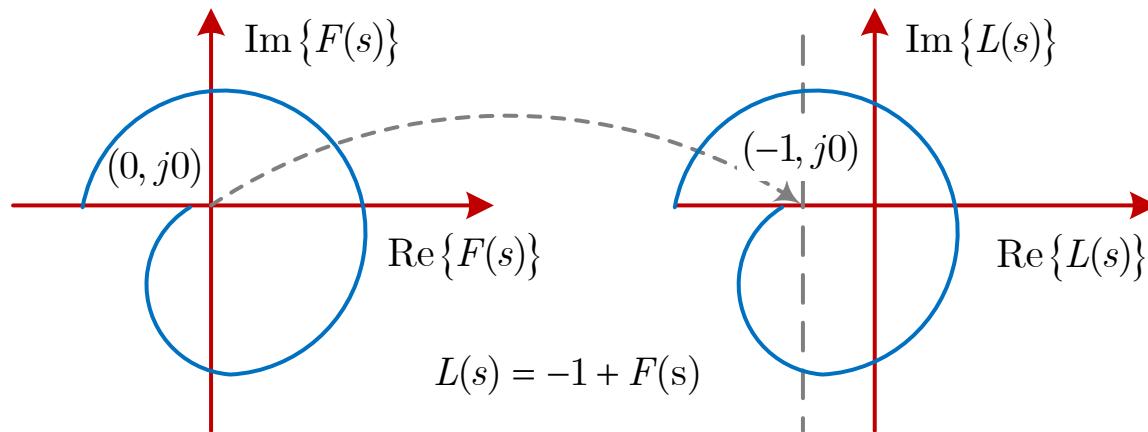
$$j\omega, \omega \in (-\infty, 0).$$



Nikvistov kriterijum stabilnosti

Ako krivu $F(s)=1+L(s)$ obidemo po Nikvistovojoj konturi C u negativnom smjeru, rezultujuća kontura $F(C)$ će oko koordinatnog početka u F -ravni napraviti ugao $|N_F - P_F|2\pi$. Da bi sistem bio stabilan, funkcija $F(s)$ ne smije imati nula u desnoj poluravni, jer su to polovi spregnutog sistema. Drugim riječima, da bi sistem bio stabilan kontura $F(C)$ mora da obuhvati koordinatni početak u F ravni za ugao $|-P_F|2\pi = |-P|2\pi$, odnosno za ugao $+P2\pi$ u pozitivnom smjeru.

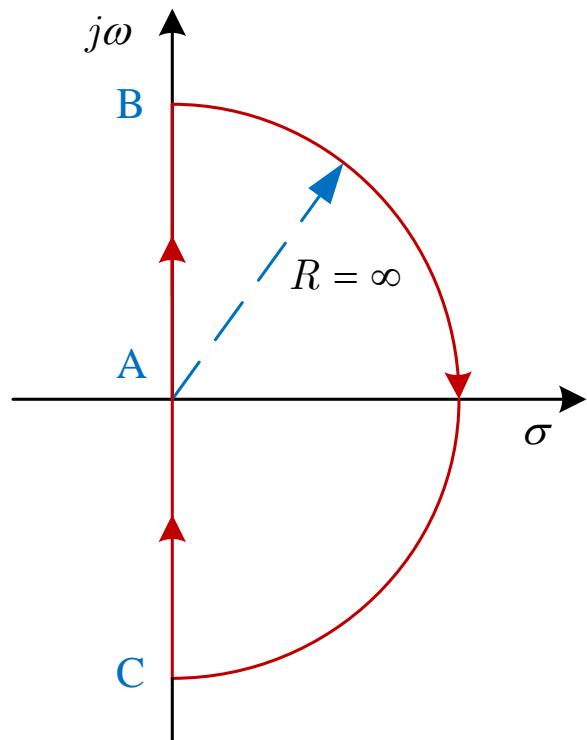
U praksi je često dostupna karakteristika sistema sistema $L(s)$, pa umjesto broja obrtaja konture $F(C)$ oko koordinatnog početka u F -ravni, možemo posmatrati broj obrtaja konture $L(C)$ oko **kritične tačke** $(-1, j0)$ u L -ravni (jer je $L(s) = -1 + F(s)$).



Nikvistov kriterijum stabilnosti

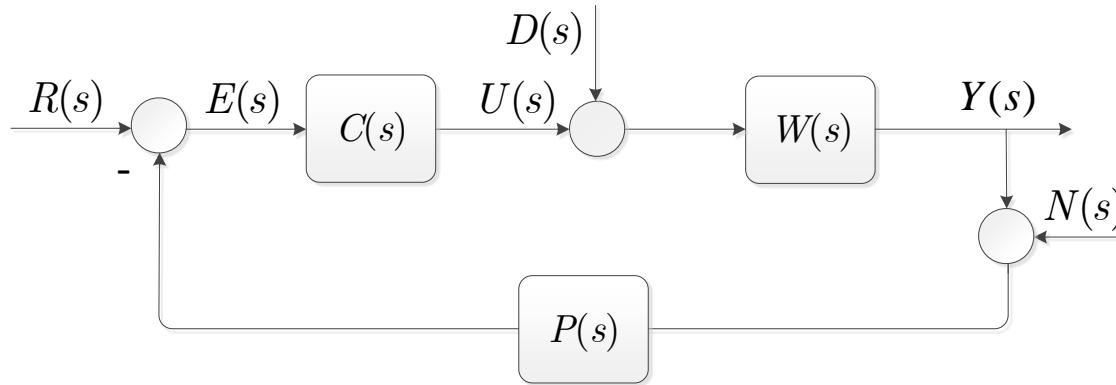
Dakle, da bi sistem sa NJPS bio stabilan, kontura $L(C)$ treba da obuhvati kritičnu tačku $(-1, j0)$ za ugao $P2\pi$ u pozitivnom smjeru, gdje je P broj nestabilnih polova funkcije povratnog prenosa $L(s)$.

Kontura $L(C)$ se može podijeliti na tri dijela – $L(AB)$, $L(BC)$ i $L(CA)$. Ukoliko sve kompleksne tačke beskonačnog poluprečnika koje pripadaju segmentu BC uvrstimo u $L(s)$, dobićemo da se one preslikavaju u jednu istu tačku. Drugim riječima, $L(BC)$ nema udjela u ugлу $+P2\pi$, koji je prethodno pomenut. Krive $L(AB=j\omega)$ i $L(CA=-j\omega)$ su simetrične u odnosu na realnu osu, što znači da će one obići kritičnu tačku $(-1, j0)$ za ugao $P\pi$ u pozitivnom smjeru.



Nikvistov kriterijum stabilnosti

Kriva $L(j\omega)$ za svako $\omega \in (-\infty, +\infty)$ se zove Nikvistova kriva. Nikvistova kriva je u stvari dobro poznata frekvencijska karakteristika sistema (Furijeova transformacija impulsnog odziva) koja se crta u Dekartovom koordinatnom sistemu, umjesto što se zasebno crtaju amplitudska (moduo) i fazna (argument) karakteristika u zavisnosti od frekvencije. Konačno, možemo formulisati Nikvistov kriterijum stabilnosti.



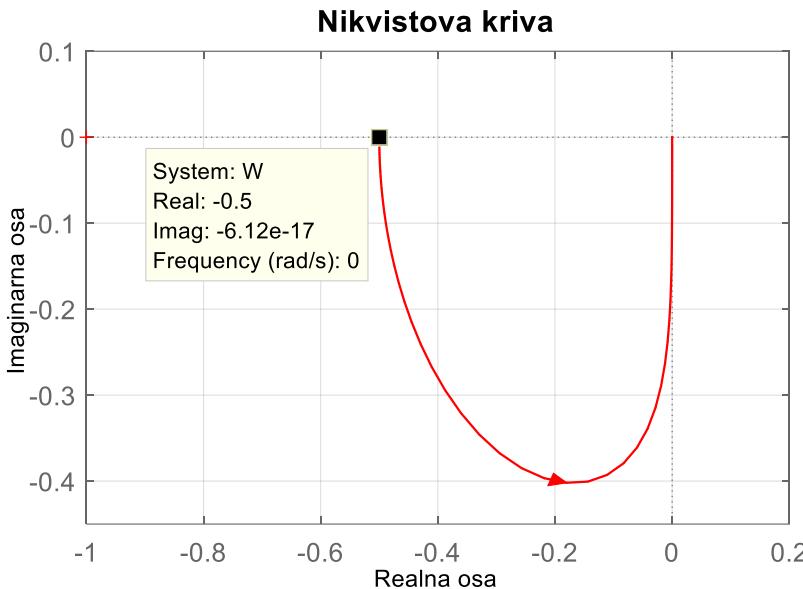
Nikvistov kriterijum stabilnosti

Neka je P broj nestabilnih polova funkcije povratnog prenosa $L(s)$. Da bi spregnuti sistem bio stabilan, Nikvistova kriva $L(j\omega)$, za $\omega \in [0, \infty]$, treba da obuhvati kritičnu tačku $(-1, j0)$ za ugao $P\pi$ u pozitivnom smjeru.

Primjer - Nikvistov kriterijum

Ispitati stabilnost sistema sa NJPS čija je funkcija povratnog prenosa:

$$W(s) = \frac{s+1}{(s-1)(s+2)}.$$



Funkcija spregnutog prenosa je:

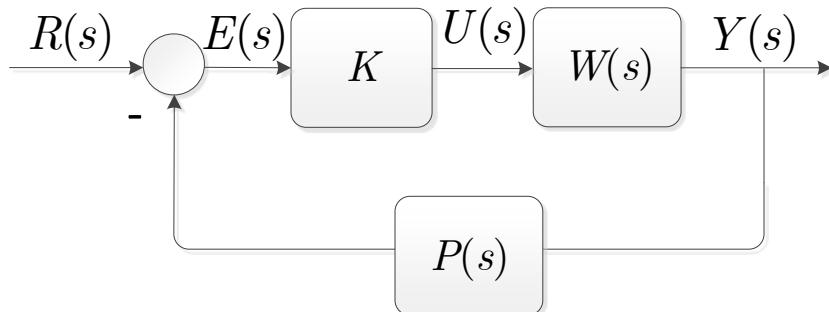
$$G(s) = \frac{W(s)}{1 + W(s)} = \frac{1}{s^2 + s - 5}.$$

Polovi sistema su $-2.4142, 0.4142$, što znači da je sistem nestabilan.

Broj nestabilnih polova je $P=1$, što znači da Nikvistova kriva treba da obuhvati kritičnu tačku $(-1, j0)$ za ugao π u pozitivnom smjeru. Sa slike se vidi kriva ne obuhvata kritičnu tačku, što znači da je sistem sa NJPS nestabilan.

```
>> s=tf('s');
>> W=(s+1)/(s-1)/(s+2);
>> nyquist(W)
>> G=feedback(W,1);
>> pole(G)
ans =
-2.7913
 1.7913
```

Nikvistov kriterijum stabilnosti

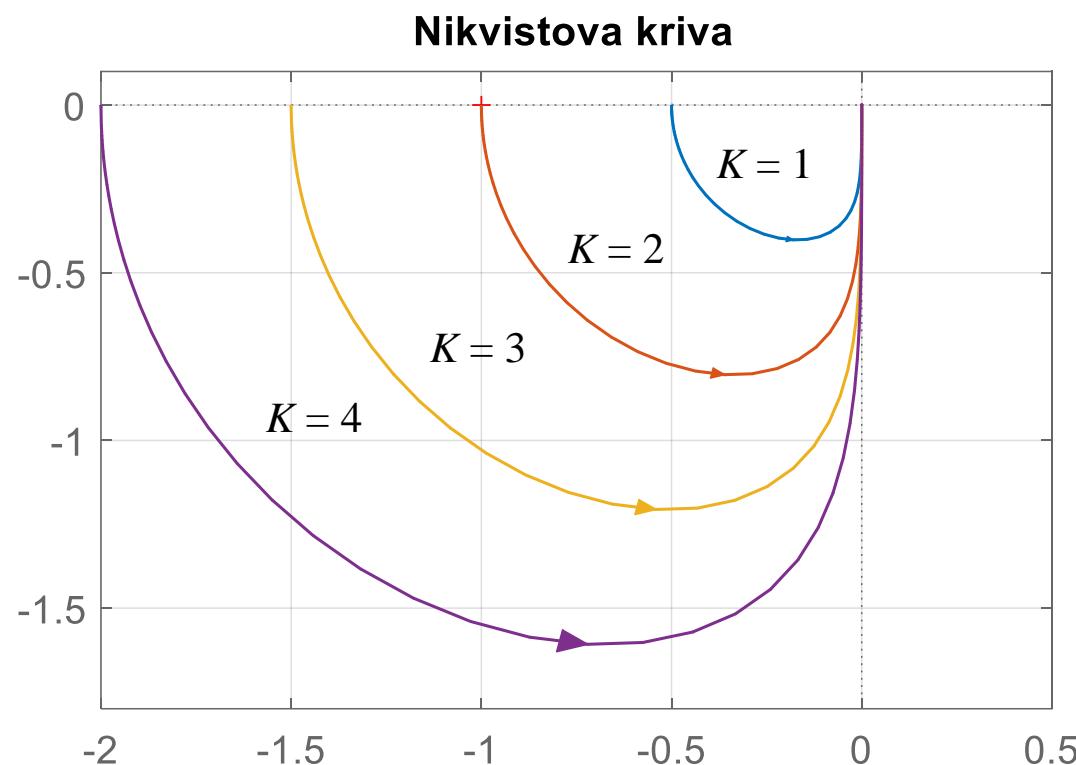


Nekad u direktnoj grani sistema sa NJPS imamo podesivo pojačanje K i želimo da ispitamo stabilnost spregnutog sistema u zavisnosti od njegove vrijednosti, pri čemu je Nikvistova kriva $L(j\omega)$ poznata. Karakteristična funkcija je u ovom slučaju jednaka:

$$F(s) = 1 + KL(s) = K \left(\frac{1}{K} + L(s) \right),$$

što znači da kao kritičnu tačku treba usvojiti $(-1/K, j0)$. Drugim riječima, vrijednost parametra K treba odabratи tako da kritična tačka $(-1/K, j0)$ bude obuhvaćena za ugao $P\pi$ u pozitivnom smjeru.

Nikvistov kriterijum stabilnosti



Na slici su prikazane Nikvistove krive za različite vrijednosti K . Može se uočiti da se množenjem sa K Nikvistova kriva skalira, odnosno da se odgovarajućim odabirom pojačanja K može podesiti položaj tačke $(-1, j0)$ u odnosu na Nikvistovu krivu.

Primjer 2 - Nikvistov kriterijum

Ispitati stabilnost sistema sa NJPS čija je funkcija povratnog prenosa

$$W(s) = \frac{s+1}{(s-1)(s+2)}.$$

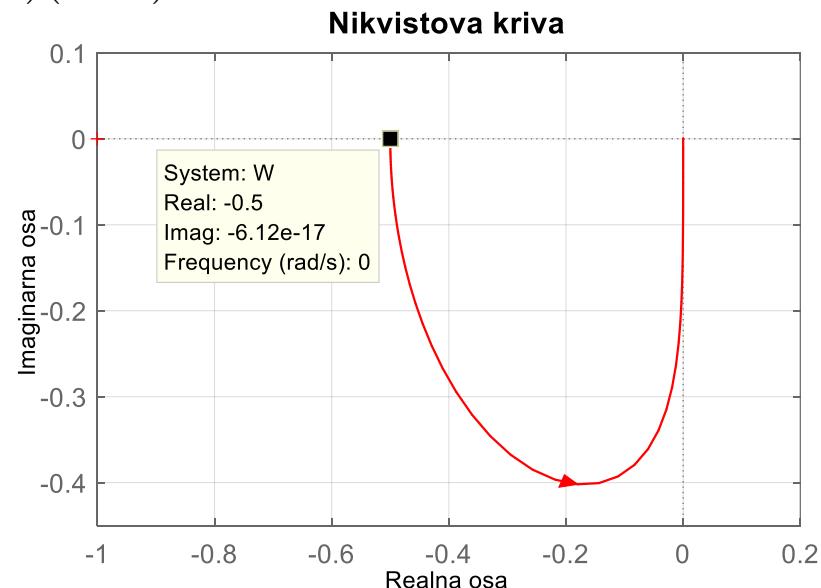
Broj nestabilnih polova je $P=1$, što znači da Nikvistova kriva treba da obuhvati kritičnu tačku $(-1/K, j0)$ za ugao π u pozitivnom smjeru. Na intervalu $(-0.5, 0)$ sve tačke su obuhvaćene za $+\pi$, što znači da kritična tačka treba da zadovolji uslov:

$$-1/K > -0.5$$

$$1/K < 0.5$$

$$K > 2$$

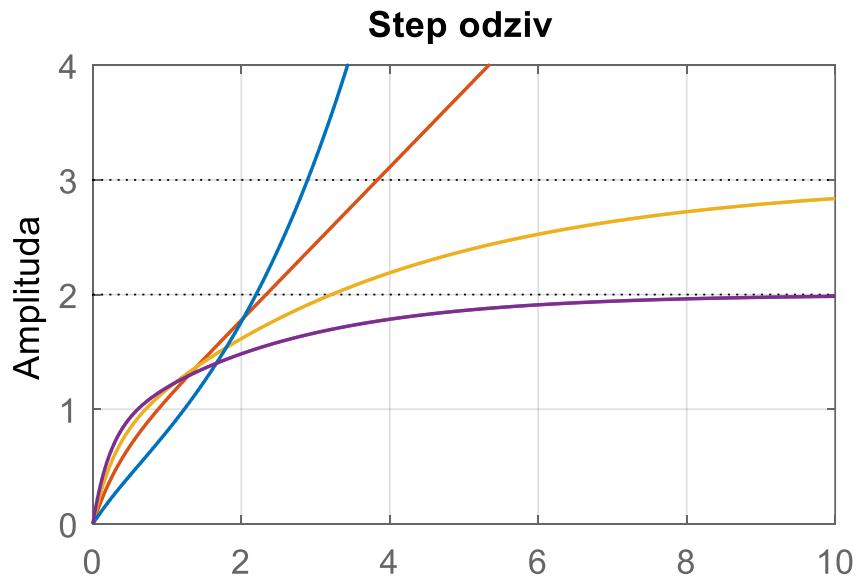
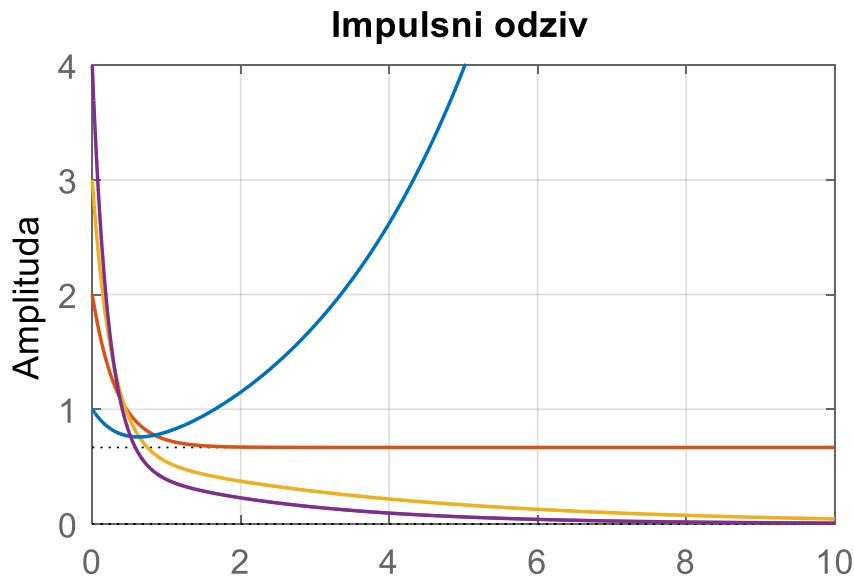
Spegnuti sistem je stabilan za $K>2$.



```
>> s=tf('s');  
>> W=(s+1)/(s-1)/(s+2);  
>> nyquist(W)
```

Primjer 2 - Nikvistov kriterijum

Na slici ispod su prikazani impulsni i step odziv sistema za različito K .



Na slikama su prikazani impulsni i step odzivi sistema za različito K . Za $K=2$ sistem je na granici stabilnosti, i tada impulsni odziv konvergira ka konstanti, dok step odziv linearno raste.

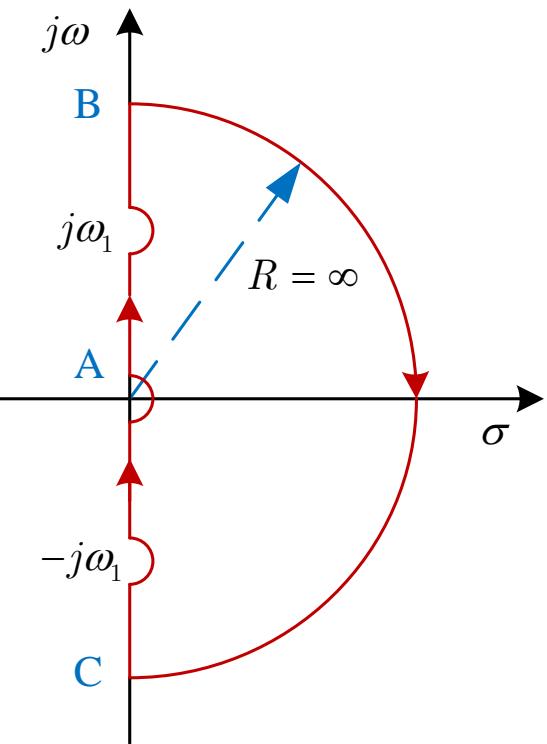
```
>> hold on; figure(2), hold on  
for k=1:4 G=feedback(k*W,1);  
figure(1), impulse(G,10);  
figure(2), step(G,10); end  
figure(1), axis([0 10 0 4])  
figure(2), axis([0 10 0 4])
```

Nikvistov kriterijum

Ukoliko funkcija povratnog prenosa ima polove koji leže na konturi C , odnosno na imaginarnoj osi, Nikvistova kriva će na toj frekvenciji težiti ka beskonačnosti. U tom slučaju treba modifikovati konturu C , tako da se zaobiđu singulariteti.

Ako $L(s)$ ima pol $s=0$, onda Nikvistovu krivu koja se dobija treba dopuniti sa vrijednostima funkcije $L(s)$ u tačkama $s=re^{j\theta}$, $r \rightarrow 0$, $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$. Ako se posmatraju samo pozitivne frekvencije, onda treba uvrstiti samo tačke za $\theta \in [0, \pi/2]$.

Ako $L(s)$ ima konjugovano kompleksni par polova na imaginarnoj osi $s=\pm j\omega_1$, tada Nikvistovu krivu koja se dobija u Matlab-u treba dopuniti sa vrijednostima funkcije $L(s)$ u tačkama $s=\pm j\omega_1+re^{j\theta}$, $r \rightarrow 0$, $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$.



Primjer 3 - Nikvistov kriterijum

Funkcija povratnog prenosa je:

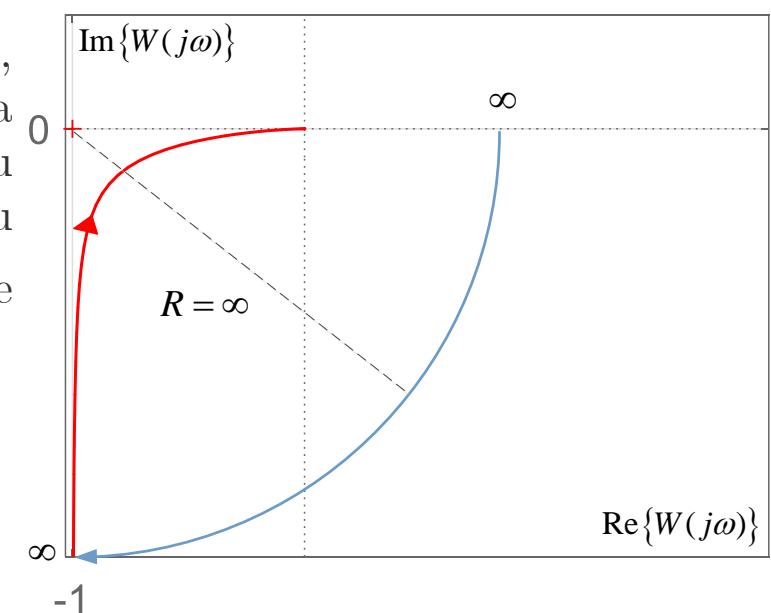
$$W(s) = \frac{1}{s(s+1)}.$$

Ispitati u kom opsegu se može mijenjati pojačanje u direktnoj grani, tako da spregnuti sistem bude stabilan.

Kako funkcija prenosa ima astatizam, Nikvistovu krivu koju vraća Matlab treba dopuniti tačkama koje se dobijaju kada se u f-ju $W(j\omega)$ uvrste tačke koje pripadaju segmentu $re^{j\theta}$, gdje $r \rightarrow 0$, $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Tražene tačke se dobijaju na sljedeći način:

$$\lim_{s \rightarrow \rho e^{j\theta}} W(s), \text{ za } \rho \rightarrow 0, \text{ i } \theta \in (0, \frac{\pi}{2})$$

$$= \infty e^{-\theta}, \theta \in (0, \frac{\pi}{2})$$



Na slici je crvenom bojom prikazana Nikvistova kriva, a plavom četvrtina kruga beskonačnog poluprečnika kojom se Nikvistova kriva dopunja i zatvara. Kako je broj nestabilnih polova jednak 0, kritična tačka $-1/K$ nije nikad obuhvaćena, te je sistem stabilan za bilo koje pozitivno K .

Primjer 3 - Nikvistov kriterijum

Treba voditi računa o tome da centar četvrtine luka nije u tački $(0,0)$, jer iz te tačke posmatrano čini se da se Nikvistova kriva dopunja lukom većim od $\pi/2$.

U suštini, Nikvistova kriva se može jednostavnije dopuniti, ne vodeći računa koliki je ugao kružnog isječka. Postupak se može opisati u dva koraka.

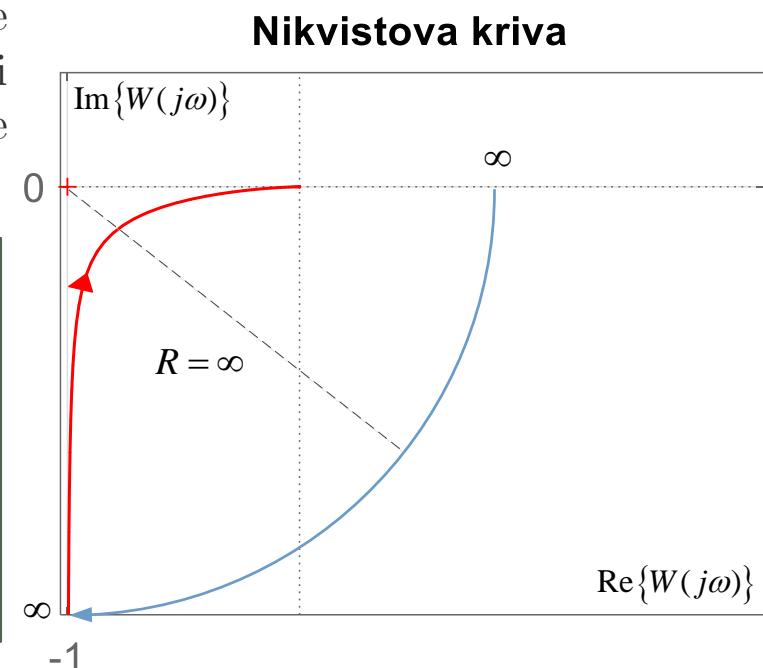
1. Prvo treba odrediti $\lim_{s \rightarrow 0} W(s)$.

Rezultat može da bude $+\infty$ ili $-\infty$, u zavisnosti od koeficijenata funkcije prenosa.

2. Nikvistova kriva se uvijek dopunja lukom koji počinje u tački $+\infty/-\infty$ na realnoj osi, i koji ide u negativnom smjeru, sve dok se ne spoji sa Nikvistovom krivom.

U ovom primjeru je:

$$\lim_{s \rightarrow 0} W(s) = \frac{1}{s(s+1)} = \frac{1}{s(0+1)} = \frac{1}{s} = +\infty.$$



```
>> s=tf('s'); W=1/s/(s+1);  
>> nyquist(W);  
>> G=feedback(W, 1)
```

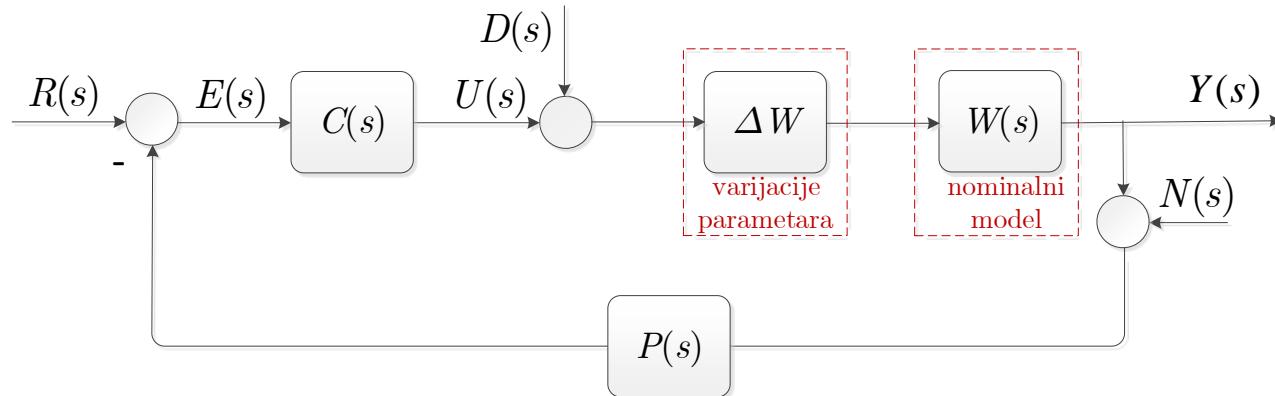
Relativna stabilnost sistema

U praksi obično nije dovoljno samo utvrditi da li je sistem stabilan ili ne, već treba dati odgovor i na pitanje **koliko je sistem stabilan**. Iz tog razloga se definišu margine stabilnosti – veličine koje nam govore koliko je sistem robustan na varijacije parametara, odnosno u kojoj mjeri je dozvoljeno varirati parametre nominalnog modela sistema, a da pri tome sistem sa zatvorenom spregom ostane stabilan.

Kad se govori o stabilnosti sistema, često se koriste dva termina: apsolutna stabilnost i relativna stabilnost. Na primjer, ako se posmatraju dva sistema, sa aposolutne tačke gledišta možemo reći da su oni stabilni ili nestabilni. Sa druge strane, kada poredimo stabilnost jednog sistema u odnosu na drugi, za onaj sistem koji ima veće margine stabilnosti možemo reći da je stabilniji u odnosu na onaj drugi, sa manjim marginama stabilnosti.

Margine (preteci) faze, pojačanja i kašnjenja su neke, ali ne i jedine mjere relativne stabilnosti, i one se mogu očitati sa Nikvistove krive.

Relativna stabilnost sistema



Dakle, osnovna ideja je kvantitativno izraziti kolike su maksimalne dozvoljne peturbacije ΔW u parametrima modela $W(s)$, odnosno u upravljačkoj petlji $L(s)=C(s)W(s)P(s)$, pri kojima će SAU i dalje ostati stabilan. U literaturi se razmatraju tri specijalna slučaja. U prvom slučaju se usvaja da je $\Delta W = a$ (čisto pojačanje), u drugom slučaju da je $\Delta W=e^{j\gamma}$, (negativno fazno kašnjenje) i u trećem slučaju da je $\Delta W=e^{-j\tau\omega t}$ (čisto vremensko kašnjenje).

U praksi su procesi često stabilni u otvorenoj spredi i kod njih Nikvistova kriva ima najviše jedan presjek sa negativnom dijelom realne ose. U nastavku su margine stabilnosti definisane upravo za takvu vrstu sistema. Za nestabilne sisteme marge stabilnosti se definišu na isti način, ali ih je teže i grafički i analitički odrediti.

Pretek pojačanja

Pretek pojačanja (a) SAU-a predstavlja minimalnu perturbaciju pojačanja u upravljačkoj petlji koja će sistem dovesti do granice stabilnosti. Da bi spregnuti sistem bio stabilan, Nikvistova kriva ne smije obuhvatiti kritičnu tačku. To znači da je pretek pojačanja ono pojačanje a_m koje će tačku presjeka gurnuti na poziciju $(-1, j0)$.

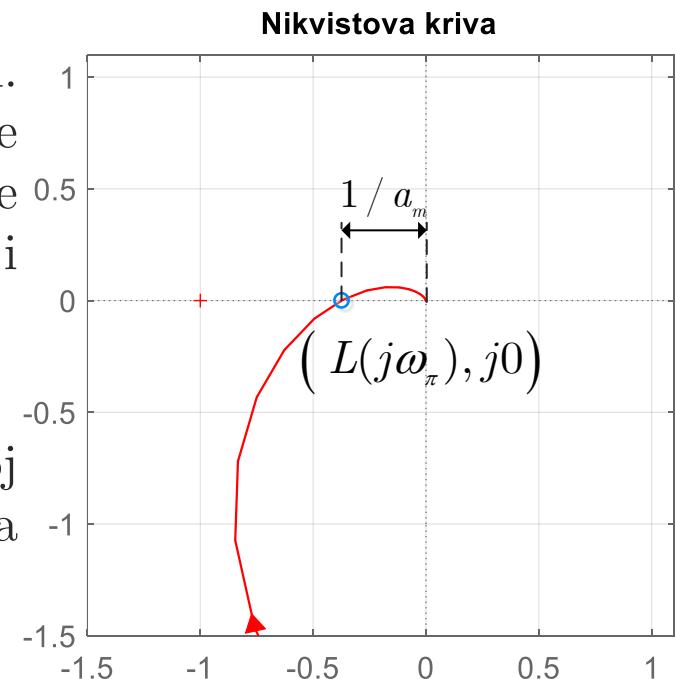
Pretek pojačanja se može odrediti analitički. Prvo treba odrediti frekvenciju ω_π na kojoj je fazna karakteristika jednaka -180° . Ta tačka se zove **presječna učestanost preteka pojačanja** i određuje se iz jednačine:

$$\arg(L(j\omega_\pi)) = -180^\circ.$$

Konačno pretek pojačanja je jednak recipročnoj vrijednosti amplitudske karakteristike na učestanosti ω_π :

$$a_m = \frac{1}{|L(j\omega_\pi)|}.$$

Pretek pojačanja se obično izražava u dB: $a_m = 20 \log \frac{1}{|L(j\omega_\pi)|}$ [dB].



Pretek faze

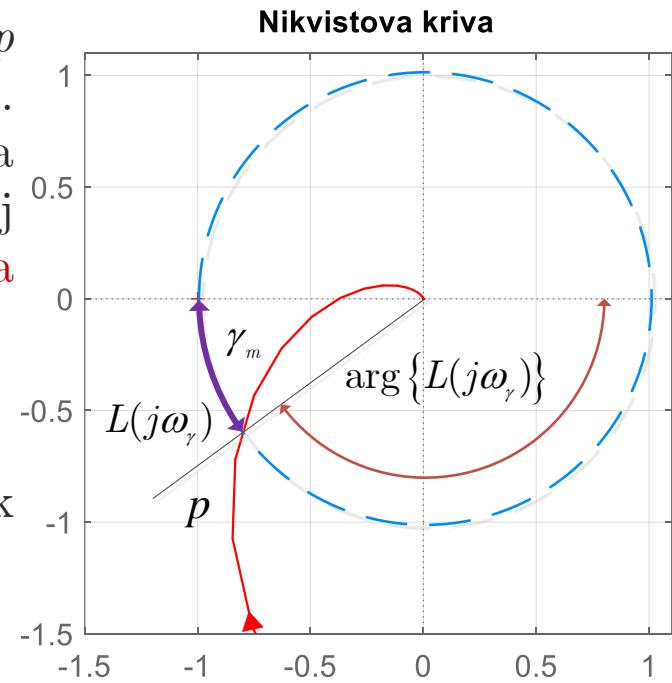
Pretek faze (γ_m) SAU predstavlja minimalni ugao za koji je potrebno zarotirati Nikvistovu krivu $L(j\omega)$ u negativnom smjeru, tako da ona prođe kroz kritičnu tačku. Sa slike se može vidjeti da se taj ugao može odrediti na taj način što se nacrtava kružnica jediničnog poluprečnika sa centrom u koordinatnom početku.

Pretek faze je jednak uglu koji poluprava p zaklapa sa negativnim dijelom imaginarnе ose. Frekvencija ω_γ na kojoj je amplitudska karakteristika funkcije prenosa u otvorenoj spredi jednaka jedinici se zove presječna učestanost preteka faze, i računa iz uslova:

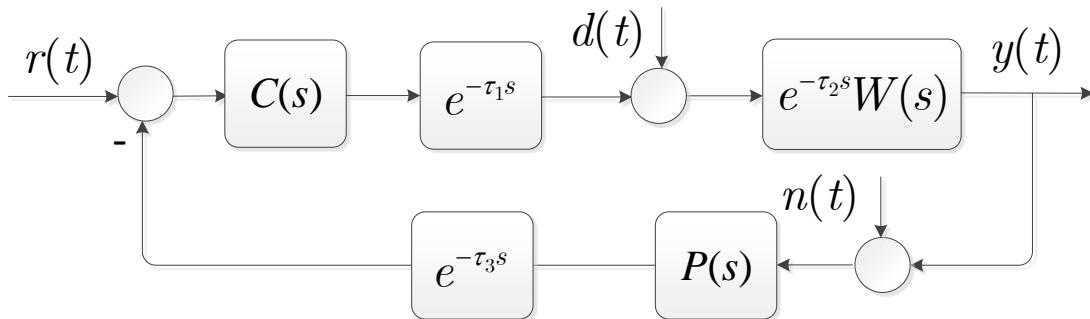
$$|L(j\omega_\gamma)| = 1.$$

Konačno, sa slike se može uočiti da je pretek faze je jednak:

$$\gamma = 180^\circ + \arg \{L(j\omega_\gamma)\}.$$

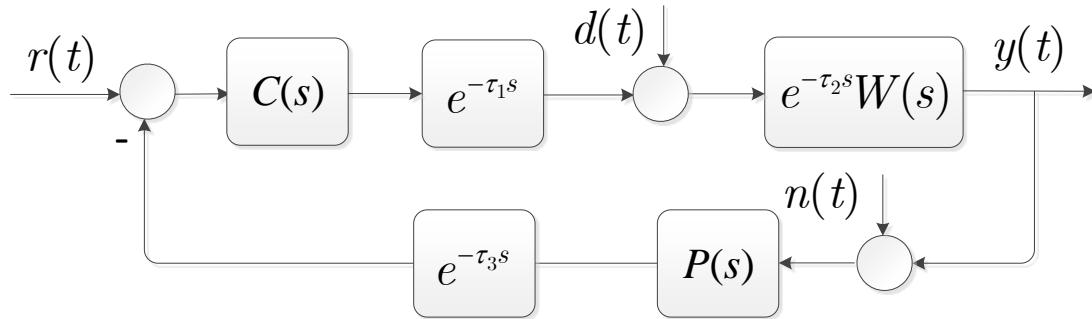


Pretek kašnjenja



Nekad u direktnoj ili povratnoj grani može doći do čistog vremenskog kašnjenja signala. Ovo kašnjenje se naziva **transportno kašnjenje** ili **mrtvo vrijeme** iz razloga što su to kašnjenja koja mogu da nastanu uslijed obrade signala u regulatoru (digitalnom), prenosa upravljačkog signala od regulatora do aktuatora, prenosa signala od senzora do regulatora, sporog odziva senzora (potrebno mu je određeno vrijeme da precizno izmjeri izlazni signal). Transportno kašnjenje se može javiti i u samom procesu, gdje ono predstavlja vrijeme koje potrebno da se fizička promjenljiva propagira sa jednog na drugi kraj objekta. Na primjer, ako upravljamo procesom zagrijevanja vode u nekoj cijevi, aktuator može da se nalazi na jednom kraju cijevi, a temperaturni senzor na drugom kraju.

Pretek kašnjenja

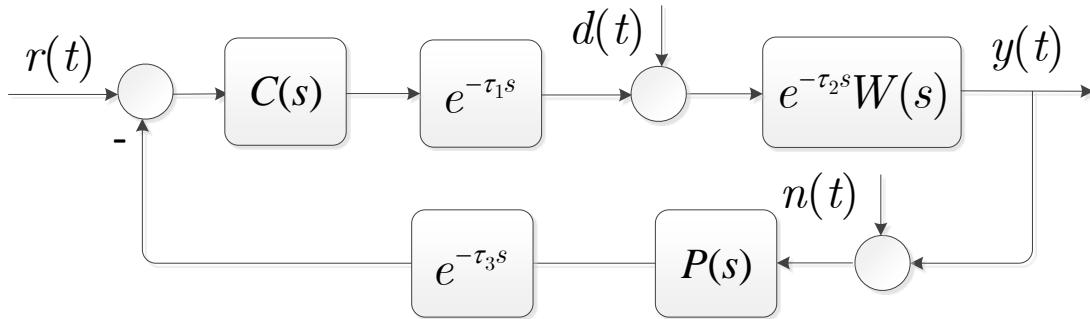


Zakašnjela verzija nekog signala $x(t-\tau)$ se u s domenu modeluje množenjem Laplovosog lika signala sa ekponencijalnom funkcijom $e^{-j\tau s}$.

Jasno da je da mrtvo vrijeme komplikuje regulaciju sistema, a može dovesti i do nestabilnosti sistema. **Pretek kašnjenja (τ_m)** predstavlja maksimalno kašnjenje koje je dozvoljeno unijeti u direktnu ili povratnu granu, a da sistem sa povratnom spregom ostane stabilan. Pretek kašnjenja se može odrediti sa Nikvistove krive funkcije povratnog prenosa $L(s)$. Naime, kašnjenje signala ne utiče amplitudsku karakteristiku sistema, dok faznu karakteristiku linearno obara, što se može zaključiti posmatranjem funkcije povratnog prenosa sa kašnjenjem:

$$L(j\omega) = e^{-j\tau\omega} C(j\omega) W(j\omega) P(j\omega).$$

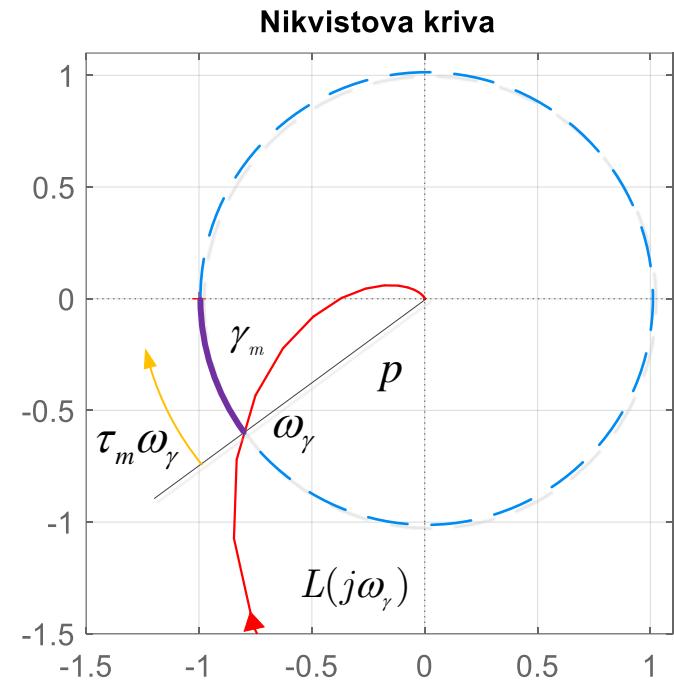
Pretek kašnjenja



Tačka Nikvistove krive $L(j\omega)$ koja odgovara frekvenciji ω_γ , odnosno presječnoj učestanosti preteka faze, će se uslijed kašnjenja τ zarotirati u negativnom smjeru za ugao $\tau\omega_\gamma$. Kako se posmatrana tačka najviše smije zarotirati za pretek faze, pretek kašnjenja se može definisati na sljedeći način:

$$\tau_m = \frac{\gamma_m}{\omega_\gamma}.$$

Dakle, sa τ_m je definisan minimalni zbir kašnjenja τ_1 , τ_2 i τ_3 , koji će sistem sa zatvorenom spregom dovesti do granice stabilnosti.



Primjer – margine stabilnosti

Funkcija povratnog prenosa sistema je: $W = \frac{2}{(s + 1)^3}$. Odrediti margine stabilnosti.

Presječna učestanost preteka pojačanja i pretek pojačanja se mogu odrediti direktno sa Nikvistove krive dobijene u Matlab-u:

$$\omega_\pi \approx 1.75 \text{ rad/s}, a_m \approx 1 / 0.246 = 4.06,$$

ili u dB: $a_m = 20 \log 4.06 = 12.17 \text{ dB}$.

Presječna učestanost preteka faze se nalazi iz uslova:

$$|L(j\omega_\gamma)| = \frac{2}{(\omega_\gamma^2 + 1)^{3/2}} = 1,$$

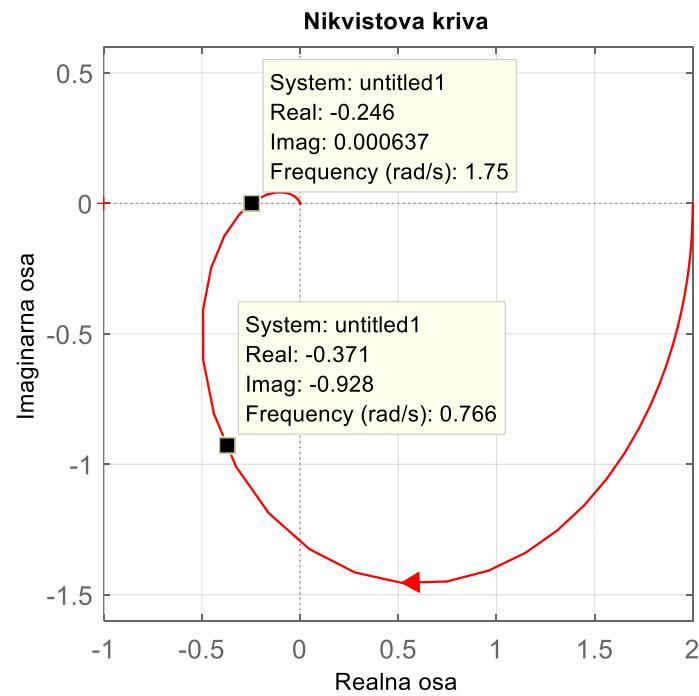
$$\omega_\gamma^2 + 1 = 2^{2/3} \rightarrow \omega_\gamma = \pm 0.7664 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

Pretek faze je jednak:

$$\gamma_m \approx 180 + \arg \{-0.371 - 0.928j\} = 68.21^\circ = 1.19 \text{ rad.}$$

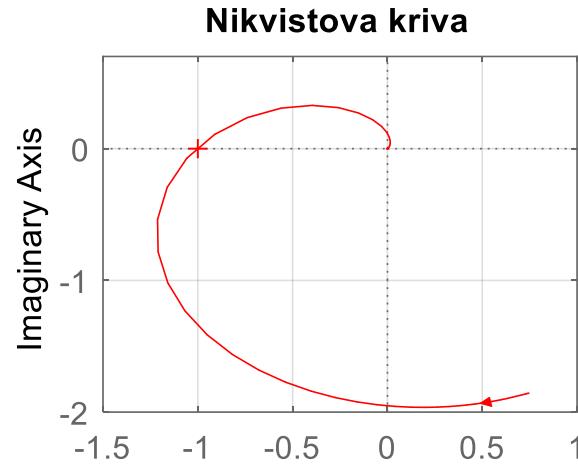
Pretek kašnjenja je jednak:

$$\tau_m = \frac{\gamma}{\omega_\gamma} \approx 1.19 / 0.766 = 1.55 \text{ s.}$$



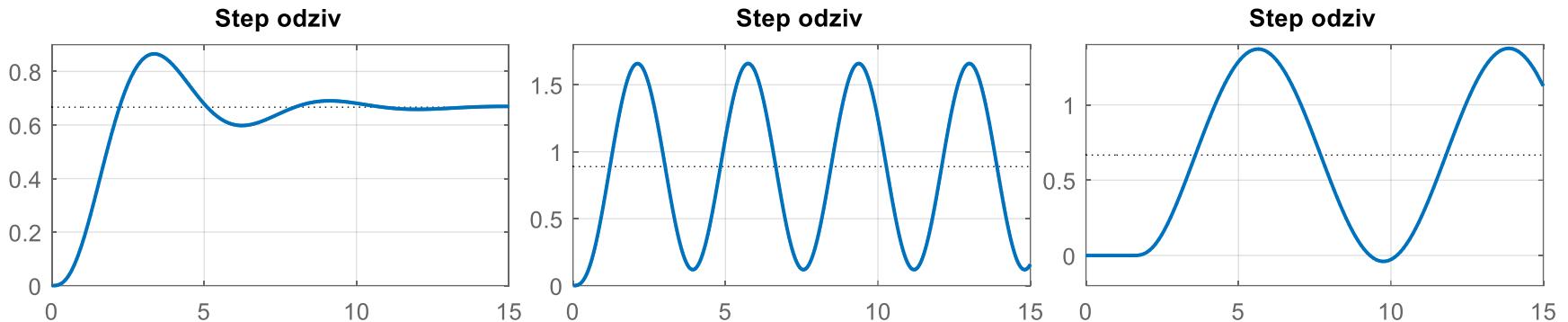
Primjer – margine stabilnosti

Na slikama ispod su prikazane Nikvistove krive sistema $a_m L(s)$, $e^{-\gamma_m s} L(s)$ i $e^{-\tau_m s} L(s)$.



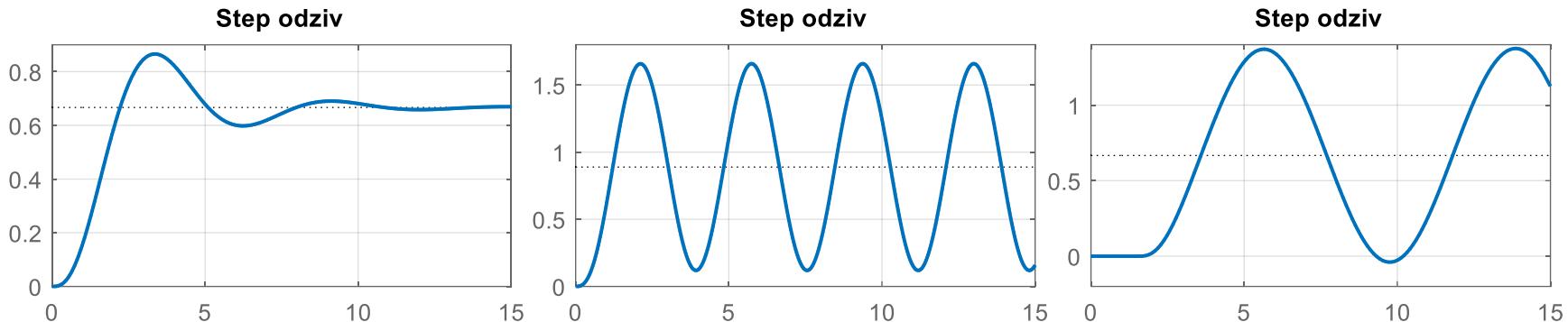
Može se uočiti da za svaki od slučajeva Nikvistova kriva prolazi kroz kritičnu tačku $(-1, j0)$, što znači da se sistem nalazi na granici stabilnosti. Takođe, treba još jednom napomenuti da prilikom projektovanja sistema upravljanja treba ostaviti određene vrijednosti amplitudske i fazne rezerve, jer se time obezbijeđuje robustnost na varijacije u parametrima procesa kojim se upravlja. SAU se najčešće projektuje tako da pretek pojačanja bude u opsegu od 2 do 5, a pretek faze u opsegu od 30° do 60° .

Primjer – margine stabilnosti



Na slikama iznad su prikazani step odzivi sistema $W(s)$, $a_m W(s)$ i $e^{-\tau_m s} W(s)$ sa NJPS. Na prvoj slici je prikazan step odziv sistema $W(s)$ sa zatvorenom spregom. Može se uočiti da je sistem stabilan, jer step odziv konvergira ka konačnoj vrijednosti (BIBO definicija stabilnosti). Sa druge strane ako se u povratnu granu unese pojačanje a_m , sistem će biti na granici stabilnosti, što se vidi sa druge slike. Takođe se, na osnovu prirode odziva, može zaključiti da spregnuti sistem ima konjugovano kompleksni par polova na imaginarnoj osi. Na trećoj slici je prikazan odziv spregnutog sistema kada se u direktnu granu unese vremensko kašnjenje τ_m . Sistem se isto nalazi na oscilatornoj granici stabilnosti, s tim što zbog mrvog vremena sistem kasni sa odzivom.

Primjer – margine stabilnosti



Ono što je takođe zanimljivo u drugom slučaju je to da funkcija prenosa spregnutog sistema više nije racionalna funkcija, već zbog eksponencijalnog člana ona ima beskonačno mnogo polova, pri čemu jedan par polova leži na imaginarnoj osi, što se vidi iz oscilatorne prirode odziva. Konačno, step odziv sistema $e^{-j\gamma_m} W(s)$ sa zatvorenom petljom nije simuliran, jer takva funkcija prenosa nema fizičku interpretaciju. Polovi spregnutog sistema su kompleksni, ali se ne pojavljuju u parovima, što sa stanovišta fizičke realizacije nije moguće. Pretek faze se fizički tumači kao mjera u kojoj se smije pogriješiti prilikom modelovanja fazne karakteristike. Na nekim od narednih predavanja, priroda step odziva (oscilacije, amplituda) će biti dovedena u vezu sa pretekom faze.

Primjer – margine stabilnosti

```
>> s=tf('s');
>> L=2/(s+1)^3 % funkcija povratnog prenosa
>> L1=4*L; % sistem pojačan a puta
>> L2=L*exp(-j*1.19) % sisema fazno pomjeren za pretek faze
>> L3=tf([2],[1 3 3 1],'IODelay',1.55); % sistem sa mrtvim vremenom
% mora se definisati na ovaj način. Unose se koeficijenti polinoima funkcije L u
% brojiocu, imeniocu i vrijednost vremenskog kašnjenja
>> nyquist(L); figure
>> nyquist(L1); figure
>> nyquist(L2); figure
>> nyquist(L3); figure
>> G=feedback(L,1);
>> G1=feedback(L1,1);
>> G3=feedback(L3,1);
>> step(G,15); figure
>> step(G1,15); figure
>> step(G3,15)
% u Matlab-u nije moguće simulirati odziv sistema G2=feedback(L2,1)
% jer matematički odziv takvog sistema imao kompleksne vrijednosti
```